ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LƯU THỊ THANH HUYỀN

NGUYÊN LÝ SO SÁNH ĐỐI VỚI TOÁN TỬ MONGE-AMPÈRE PHỨC TRONG CÁC LỚP F_p^T (W) VÀ E_p^T (W)

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LƯU THỊ THANH HUYỀN

NGUYÊN LÝ SO SÁNH ĐỐI VỚI TOÁN TỬ MONGE-AMPÈRE PHỨC TRONG CÁC LỚP $F_p^T(W)$ VÀ $E_p^T(W)$

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TS Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN-2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Lưu Thị Thanh Huyền

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2017

Tác giả

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN i

LỜI CẢM ƠN ii

MỤC LỤC iii

MỞ ĐẦU 1

1. Lý do chọn đề tài 1

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu 2

3. Phương pháp nghiên cứu 2

4. Bố cục luận văn 2

Chương 1. CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ 4

1.1. Dạng vi phân và dòng trong lý thuyết đa thế vị 4

1.2. Hàm đa điều hòa dưới 6

1.3. Toán tử Monge-Ampère phức 8

1.4. Tính tựa liên tục của hàm đa điều hòa dưới 10

1.5. Nguyên lý so sánh Bedford-Taylor 12

1.6. Các lớp năng lượng Cegrell 16

Chương 2. NGUYÊN LÝ SO SÁNH ĐỐI VỚI TOÁN TỬ MONGE-AMPERE PHỨC TRONG CÁC LỚP $F_p^T(W)$ VÀ $E_p^T(W)$ 17

2.1. Các lớp $F_p^T(W)$ và $E_p^T(W)$ 17

2.2. Các Định lý so sánh 25

2.3. Tính C_T - tựa liên tục 28

2.4. Nguyên lý so sánh trong các lớp $F_p^T(W)$ và $E_p^T(W)$ 36

KẾT LUẬN 45

TÀI LIỆU THAM KHẢO 46

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Cho Ω là một tập bị chặn của $\mathbb{C}^n$ và $PSH(\Omega)$ tập hợp các hàm đa điều hòa dưới trên Ω. Năm 1982, E. Berfod và B.A. Taylor [2] đã xây dựng toán tử Monge-Ampere phức $(dd^c.)^n$ cho lớp hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương, một khái niệm đóng vai trò quan trọng trung tâm trong lý thuyết đa thế vị. Các tác giả đã chỉ ra rằng toán tử này hoàn toàn xác định trên lớp các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương và có ảnh trong lớp các độ đo không âm, đồng thời thiết lập nguyên lí so sánh để nghiên cứu bài toán Dirichle trên $PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Năm 1984, Kiselman đã chỉ ra rằng không thể mở rộng toán tử $(dd^c.)^n$ tới lớp các hàm đa điều hòa dưới bất kỳ mà vẫn có ảnh trong lớp các độ đo không âm. Bài toán mở rộng miền xác định của toán tử Monge-Ampere đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Năm 1998, Cegrell [3] đã định nghĩa các lớp năng lượng $\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F}_p(\Omega), \mathcal{E}_p(\Omega)$ trên đó toán tử Monge-Ampere phức hoàn toàn xác định. Năm 2004, Cegrell [4] đã định nghĩa các lớp $\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{F}(\Omega)$ và chỉ ra rằng lớp $\mathcal{E}(\Omega)$ là lớp hàm định nghĩa tự nhiên của toán tử Monge-Ampere phức. Đó là lớp hàm lớn nhất trên đó toán tử Monge – Ampère xác định, liên tục dưới dãy giảm các hàm đa điều hòa dưới. Nghiên cứu các lớp này dẫn đến nhiều kết quả như nguyên lý so sánh, giải bài toán Dirichlet, sự hội tụ theo dung lượng…

Năm 2006, Dabbek và Elkhadhra [5] đã mở rộng miền xác định của toán tử $(dd^c.)^q \wedge T$ trong trường hợp hàm đa điều hòa dưới bị chặn, ở đó T là dòng dương đóng song chiều (q,q) trên Ω với $1 \le q \le n$. Năm 2014, Hbil, Jaway và Ghiloufi [9] đã mở rộng miền xác định của toán tử Monge-Ampere tới một vài lớp các hàm đa điều hòa dưới không bị chặn. Theo hướng nghiên cứu này chúng tôi chọn đề tài: “Nguyên lý so sánh đối với toán tử Monge-Ampere phức trong các lớp $\mathcal{F}_p^T(\Omega)$ và $\mathcal{E}_p^T(\Omega)$”.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn là nghiên cứu và trình bày lại các kết quả của Hbil, Jaway và Ghiloufi [9] về mở rộng miền xác định của $(dd^c.)^q \wedge T$ đối với các lớp hàm đa điều hòa dưới không nhất thiết bị chặn với T là một dòng dương đóng song chiều (q,q) trên một tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Giới thiệu hai lớp $\mathcal{F}_p^T(\Omega)$ và $\mathcal{E}_p^T(\Omega)$ [8] và chỉ ra rằng chúng thuộc miền xác định của toán tử $(dd^c.)^q \wedge T$. Đồng thời chứng minh rằng tất cả các hàm số thuộc các lớp này đều là C_T - tựa liên tục và nguyên lí so sánh có hiệu lực trong các lớp đó.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về dạng vi phân và dòng trong lý thuyết đa thế vị, các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, toán tử Monge-Ampère, tính tựa liên tục của hàm đa điều hòa dưới, nguyên lý so sánh Bedford-Taylor, các lớp năng lượng Cegrell. Nghiên cứu một số tính chất của các lớp $\mathcal{F}_p^T(\Omega)$ và $\mathcal{E}_p^T(\Omega)$. Tính C_T - tựa liên tục trong các lớp $\mathcal{F}_p^T(\Omega)$ và $\mathcal{E}_p^T(\Omega)$. Nghiên cứu nguyên lí so sánh trong các lớp $\mathcal{F}_p^T(\Omega)$ và $\mathcal{E}_p^T(\Omega)$.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 47 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả cơ sở của lý thuyết đa thế vị, về dạng vi phân và dòng trong lý thuyết đa thế vị, các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, toán tử Monge-Ampère, tính tựa liên tục của hàm đa điều hòa dưới, nguyên lý so sánh Bedford-Taylor, các lớp năng lượng Cegrell. Các nội dung chính của chương này được tham khảo trong tài liệu tham khảo [1].

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu gần đây của Hbil, Jaway và Ghiloufi [9] về mở rộng miền xác định của $(dd^c.)^q \wedge T$ đối với các lớp hàm đa điều hòa dưới không nhất thiết bị chặn với T là một dòng dương đóng song chiều (q,q) trên một tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Một số tính chất của các lớp $\mathcal{F}_p^T(\Omega)$ và $\mathcal{E}_p^T(\Omega)$ [8]. Chứng minh tính C_T- tựa liên tục của các hàm số thuộc các lớp $\mathcal{F}_p^T(\Omega)$ và $\mathcal{E}_p^T(\Omega)$ và nguyên lí so sánh trong các lớp đó.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

CHƯƠNG 1
CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Dạng vi phân và dòng trong lý thuyết đa thế vị

Giả sử $\mathbb{R}^n$ là không gian vector n chiều với cơ sở chính tắc $e_j = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, ở đó 1 ở vị trí thứ j. Giả sử với mỗi $1 \le j \le n$ kí hiệu u_j là hàm tọa độ thứ j : $u_j(x) = x_j$. Một ánh xạ $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{p} \to \mathbb{C}$ gọi là p- tuyến tính nếu nó là tuyến tính theo từng biến khi các biến khác cố định. Một ánh xạ p- tuyến tính sao cho $f(v_1,\dots,v_p) = 0$ khi $v_j = v_{j+1}, 1 \le j < n$ gọi là ánh xạ p- tuyến tính thay dấu. Tập các ánh xạ p- tuyến tính thay dấu từ $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{p}$ tới $\mathbb{C}$ kí hiệu $\wedge^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở. Một p- dạng vi phân trên Ω là ánh xạ $\alpha : U \to \wedge^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Nếu đặt $dx_k(x) = u_k, 1 \le k \le n, x \in \Omega$ thì ta có thể viết mỗi p- dạng vi phân α trên Ω dưới dạng $\alpha(x) = \sum_I{}' \alpha_I(x) dx_I$, trong đó $I = (i_1,\dots,i_p), 1 \le i_1 < \dots < i_p \le n, dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \alpha_I(x)$ là các hàm trên Ω. Giả sử $\alpha = \sum_I{}' \alpha_I dx_I$ là p- dạng và $\beta = \sum_J{}' \beta_J(x) dx_J$ là q- dạng, ở đó $1 \le i_1 < \dots < i_p \le n$ và $1 \le j_1 < \dots < j_q \le n$ khi đó tích ngoài $\alpha \wedge \beta$ là

$(p+q)$- dạng cho bởi công thức $\alpha\wedge\beta = \sum_{L} \gamma_L dx_L$, ở đó $\gamma_L dx_L = 0$ nếu $i_k = j_l$ với $1\le k\le p, 1\le l\le q$ và $\gamma_L dx_L = (-1)^{\sigma}\alpha_I\beta_J dx_{l_1}\wedge\ldots\wedge dx_{l_{p+q}}$, $1\le l_1<\ldots<l_{p+q}\le n$ với σ là hoán vị của dãy $i_1<i_2<\ldots<i_p$ và $j_1<j_2<\ldots<j_q$ trong tập hợp $\{1,\ldots,n\}$ để tạo thành dãy tăng $1\le l_1<\ldots<l_{p+q}\le n$.

Nếu f là một hàm thì $f\wedge\alpha = f\alpha$ và $(f\alpha)\wedge\beta = f(\alpha\wedge\beta)$.

Cho α là p- dạng lớp C^1. Vi phân ngoài của α là $(p+1)$- dạng cho bởi $d\alpha = \sum_{I}{}' d\alpha_I\wedge dx_I$. Giả sử $\alpha = \varphi\, dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n, \varphi\in L^1(\Omega)$. Khi đó

$$\int_{\Omega}\alpha = \int_{\Omega}\varphi\, dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n = \int_{\Omega}\varphi\, dV,$$ dV là độ đo Lebesgue trên Ω.

Định nghĩa 1.1.2. Một dòng bậc p hay có chiều $(n-p)$ trên tập mở $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ là dạng tuyến tính liên tục $T:\mathcal{D}^{(n-p)}(\Omega)\to\mathbb{C}$. Nếu α là dạng trong $\mathcal{D}^{(n-p)}(\Omega)$, giá trị của T tại α, kí hiệu bởi $T(\alpha)$ hay $\langle T,\alpha\rangle$.

Bây giờ giả sử $p,q = 0,1,\ldots,n$. Ta kí hiệu $\mathbb{C}_{(p,q)}$ là tập các dạng phức song bậc (p,q) hệ số hằng trên $\mathbb{C}^n$. Khi đó nếu $\omega\in\mathbb{C}_{(p,q)}$ thì có thể biểu diễn:

$$\omega = \sum_{|J|=p,|K|=q}{}' \omega_{JK}\, dz_J\wedge d\bar{z}_K,$$

trong đó $\omega_{JK}\in\mathbb{C}$, $dz_J = dz_{j_1}\wedge\ldots\wedge dz_{j_p}$, $d\bar{z}_K = d\bar{z}_{k_1}\wedge\ldots\wedge d\bar{z}_{k_q}$ tổng lấy theo các bộ đa chỉ số $J=(j_1,\ldots,j_p), K=(k_1,\ldots,k_q)$ với $1\le j_1<\ldots<j_p\le n$, $1\le k_1<\ldots<k_q\le n$. Dạng Kähler chính tắc trên $\mathbb{C}^n$ cho bởi: